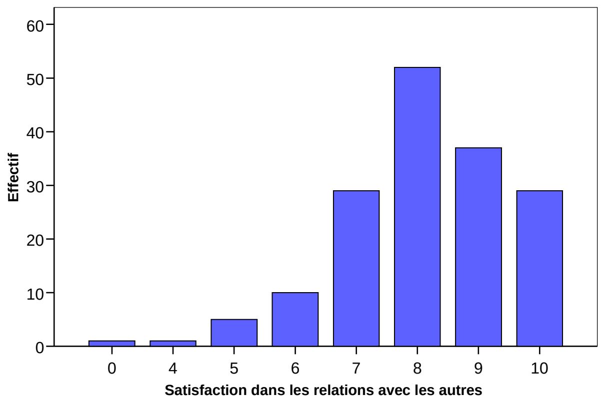
Corrigé de la première série d'exercices supplémentaires

Exercices 2.20, 3.9, 5.1, 6.4, 7.4, 8.1, 9.10

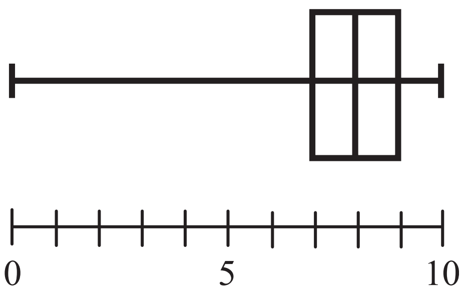
Exercice 2.20

Graphique en bâtons :



Premier quartile : $rang = (164 + 1)/4 = 41.25 \Longrightarrow q_1 = 7$.
Médiane : $rang = (164 + 1)/2 = 82.5 \Longrightarrow med(x) = 8$.
Troisième quartile : $rang = 3(164 + 1)/4 = 123.75 \Longrightarrow q_3 = 9$.

Boxplot :



Les deux graphiques montrent une distribution très asymétrique avec une forte prédominance des degrés de satisfaction les plus élevés. La valeur zéro, observée à une seule reprise, peut être assimilée à une donnée aberrante, car elle est très éloignée de toutes les autres observations. C'est cette observation qui rend la moustache de gauche du boxplot aussi étendue. Si les données étaient représentées sur un schematic plot plutôt que sur un boxplot, cette donnée serait représentée individuellement.

Par ailleurs, on peut noter que sur le diagramme en bâtons, seules les valeurs réellement observées apparaissent sur l'axe horizontal, alors qu'il pourrait être plus judicieux de montrer toutes les valeurs possibles entre 0 et 10.

Exercice 3.9

1. Tableau des effectifs sous l'hypothèse d'indépendance :

Nombre d'enfants	Revenu en milliers de couronnes [0,1[	[1,2[	[2,3[	[3,4[	Total
0	2313.9	4134.5	1957.2	1152.4	9558
1	2689.7	4805.8	2274.9	1339.6	11110
2	880.0	1572.4	744.3	438.3	3635
3	188.3	336.5	159.3	93.8	778
4 et plus	44.1	78.7	37.3	21.9	182
Total	6116	10928	5173	3046	25263

2. En termes absolus, les plus grandes différences se situent entre la catégorie "0 enfant" et les catégories de revenu "[1,2[" et "[3,4[", ainsi qu'entre "1 enfant" et "[3,4[". En termes relatifs, par raport à la valeur observée dans chaque cellule, la plus grande différence se situe entre 3 enfants et "[2,3[".
3. $K^2 = 568.57$
   $\max(K^2) = 25263 \cdot \min(5\text{-}1\,;\,4\text{-}1) = 75789$
4. $$V = \sqrt{\frac{568.57}{75789}} = 0.0866$$

   Les deux variables ne sont pas indépendantes, mais leur association est néanmoins très faible. Il n'est pas du tout possible de prédire la modalité prise par l'une des variables en fonction de la modalité de l'autre variable.

Exercice 5.1

1. Tableau de distribution pour la catégorie socio-professionnelle :

Modalité x_i	Au foyer	Ouvrier	Cadre	Professionnel
$p(x_i)$	0.2	0.35	0.4	0.05

2. Tableau de distribution pour le revenu familial :

Modalité x_i	Faible	Moyen	Elevé
$p(x_i)$	0.15	0.65	0.2

3. (a) P(Cadre $\cap$ Elevé) $= 12/200 = 0.06$
   (b) P(Au foyer$\cap$ Faible) $= 8/200 = 0.04$
   (c) P(Professionnel $\cap$ Moyen) $= 2/200 = 0.01$
4.

$$\begin{aligned}
\text{P(Elevé | Au foyer)} &= \frac{\text{P(Elevé} \cap \text{Au foyer)}}{\text{P(Au foyer)}} \\
&= \frac{6/200}{40/200} = 0.15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{P(Cadre | Elevé)} &= \frac{\text{P(Cadre} \cap \text{Elevé)}}{\text{P(Elevé)}} \\
&= \frac{12/200}{40/200} = 0.3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{P(Ouvrier | Faible)} &= \frac{\text{P(Ouvrier} \cap \text{Faible)}}{\text{P(Faible)}} \\
&= \frac{16/200}{30/200} = 0.5\overline{3}
\end{aligned}$$

5. Deux méthodes équivalentes pour répondre à cette question :
   (a) Vérifier si le produit des probabilités simples est égal à la probabilité conjointe de A et B. Ici,
   $$P(A) \cdot P(B) = 0.35 \cdot 0.15 = 0.0525$$
   alors que $P(A \cap B)$ = 16/200=0.08. Conclusion : A et B sont dépendants.
   (b) Vérifier si la probabilité d'un des événements est égale à la probabilité de cet événement conditionnellement à l'autre événement. Ici, par exemple,
   $$P(A|B) = 16/30 = 0.5\overline{3}$$
   alors que $P(A)$=0.35. Conclusion : A et B sont dépendants.

Exercice 6.4

1. $\mu = 18.75$, $\sigma^2 = 54.6875$
2.

$$\begin{aligned}
\text{E}(\bar{X}) &= 18.75 \\
\text{Va}(\bar{X}) &= \left(\frac{m-n}{m-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} \\
&= \left(\frac{200-20}{200-1}\right)\frac{54.6875}{20} \\
&= 2.47
\end{aligned}$$

Exercice 7.4

1. Les 2 classeurs de première année peuvent être ordonnés de 2! manières, ceux de deuxième de 4! manières et ceux de troisième de 6! manières. En plus, il y a 3! manières d'ordonner les trois groupes (première, deuxième et troisième année) de classeurs. Donc au total, il y a $2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 3! = 207360$ manières de placer les classeurs.
2. Si le deuxième classeur depuis la droite est de première année, cela signifie que les deux classeurs de première année sont tout à droite. Donc il ne reste plus que 2! possibilités (2-3-1 et 3-2-1) pour l'ordre des années, qu'il faut aussi multiplier par $2! \cdot 4! \cdot 6!$ pour les permutations au sein des années. Il faut ensuite diviser cette valeur par le nombre total de manières de placer les 12 classeurs que vous avez obtenu au point 1 de l'exercice. La probabilité s'écrit donc

$$\frac{2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 2!}{2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 3!} = \frac{1}{3}$$

Exercice 8.1

1. $X \sim \mathrm{Bin}(n = 10; p = 0.6)$
   $\mathrm{E}(X) = np = 6$, $\mathrm{Var}(X) = np(1 - p) = 2.4$
2. $$\begin{aligned} P(X = 3) &= C_{10}^{3} 0.6^3 0.4^7 = 0.0425 \\ P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0.0001 + 0.0016 + 0.0106 = 0.0123 \\ P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - (P(X \leq 2) + P(X = 3)) \\ &= 1 - (0.0123 + 0.0425) = 0.9452 \end{aligned}$$
3. $N \sim \mathrm{Binneg}(x = 3; p = 0.6)$
   $\mathrm{E}(N) = x/p = 5$, $\mathrm{Var}(N) = x(1 - p)/p^2 = 3.\bar{3}$
4. $$\begin{aligned} P(N > 3) &= 1 - P(N \leq 3) \\ &= 1 - P(N = 3) \\ &= 1 - C_2^2 0.6^3 0.4^0 \\ &= 1 - 0.216 = 0.784 \end{aligned}$$

Exercice 9.10

1. (a) 0.0057
   (b) 0.1060
   (c) -1.63
   (d) 0.10
2. (a) 0.5705
   (b) 0.8289
3. (a) 0.550
   (b) -2.878
4. (a) 0.95
   (b) 32.80
5. (a) 0.95
   (b) 3.94